Präsenzübung zu den Rechenmethoden der Physik II	2. Woche

Nabla-Kalkül

(a) Formen Sie folgende Ausdrücke um: $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})$, $\vec{\nabla}\cdot(f\,\vec{A})$, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$, $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})$.

(b) Berechnen Sie folgende Ausdrücke: $\vec{\nabla}\,r$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_r$, $\vec{\nabla}\times\vec{e}_r$.

(c) $\vec{E} = Q_0\vec{e}_r\frac{1}{r^2}\theta(r-R)$ ist das elektrische Feld einer Metallkugel. $\partial_x E_x = ?$ $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = ?$

Yukawa-Potenzial

In der Elektrostatik folgt aus der Definition des elektrostatischen Potenzials $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ mit der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$ wegen $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \triangle$ die Poisson-Gleichung

$$\triangle\,\phi \;=\; -4\pi\,\rho\;,$$

mit deren Hilfe man zu einem gegebenen Potenzial ϕ die zugrundeliegende Ladungsdichte ρ ermitteln kann. Als Beispiel betrachten wir das so genannte Yukawa-Potenzial

$$\phi \;=\; \phi(r) \;=\; \frac{q}{r}\exp(-r/a) \qquad \text{mit positiven Konstanten } q \text{ und } a \text{ für } r = |\vec{r}| \geq 0\;.$$

(a) Welche Ladungsdichte $\rho(r)$ gehört zum Yukawa-Potenzial für $r{\neq}0$?
Rechnen Sie in Kugelkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie die Gesamtladung $Q_a = \int_{0+}^{\infty}\mathrm{d}^3r\,\rho(r)$ außerhalb des Ursprungs.

(c) Im Ursprung divergiert das Potenzial. Um einen möglichen singulären Beitrag von $r{=}0$ zur Ladungsdichte zu finden, nähern Sie das Potenzial für kleine r und verwenden die Identität $\triangle\frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\vec{r})$.

(d) Skizzieren Sie die vollständige Ladungsdichte und geben Sie die totale Gesamtladung $Q = Q_a + Q_i$ an ('i' steht für 'innen').

Hinweise: $\triangle f(r) \;=\; f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) \;=\; \frac{1}{r}\partial_r^2\big(r\,f(r)\big)$ und $\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\;x\,\mathrm{e}^{-x} = 1$.